روش مرز غوطه‌ور- شبکهٔ بولتزمن برای شبیه‌سازی حرکت ذره در سیالات غیرنیوتنی*

امین امیری دلوئی[۱]   محمد حسن کیهانی[۲]   محسن نظری[۳]

چکیـــده *در مطالعـهٔ حاضـر روش ترکیبـی مرزغوطـه‌ور- شـبکهٔ بـولتزمن غیرنیـوتنی بـرای شـبیه‌سـازی نیروهـای وارد بـر ذره و هـم‌چنـین محاسـبهٔ سـرعت حرکـت ذره در مجـاورت سـیالات غیرنیـوتنی مختلـف، توسـعه داده شـده اسـت. در ایـن تحقیـق، اثـرات نیروی اضافی ناشی از وجود جـرم شـتابدار نیـز در معـادلات حرکـت غیرنیـوتنی ذره لحـاظ شـده‌انـد. دو مسـئلهٔ کـاربردی شـامل جریـان سـیال غیرنیـوتنی تـوانی از روی سـیلندر ثابـت بـا سـطح مقطـع مربعـی و سـقوط یـک ذرهٔ مربعـی در سـیالات غیرنیـوتنی بـا خـواص مختلف رقیق‌برشی و ضـخیم‌برشـی بررسـی شـده اسـت. نتـایج نشـان مـی‌دهنـد کـه نیـروی وارد بـر سـیلندر در حالـت ثابـت و سـرعت حد ذره در حـال سـقوط بـا افـزایش شـاخص رفتـار غیرنیـوتنی تـوانی بـه‌ترتیـب افـزایش و کـاهش قابـل ملاحظـه‌ای را تجربـه خواهنـد نمود.*

واژه های کلیدی روش مرز غوطه‌ور; روش شبکهٔ بولتزمن; شبیه‌سازی عددی مستقیم; سیال غیرنیوتنی توانی; سطح مقطع مربعی.

Simulation of Particle Motion in Non-Newtonian Fluids by Immersed Boundary Lattice Boltzmann Method

A. Amiri Delouei   M.H. Kayhani   M. Nazari

Abstract *In the current study, the immersed boundary – non-Newtonian lattice Boltzmann method is developed for simulation of forces act on a particle and also for computation of the particle velocity in vicinity of non-Newtonian fluids. In this research, the effect of extra force due to accelerated mass is also considered in non-Newtonian particle motion equations. Two applied problems of power-law non-Newtonian fluid flow over a stationary cylinder with square cross-section and a square falling particle in non-Newtonian fluids with different shear-thinning and shear-thickening behaviour are investigated. Results indicate that the force act on stationary cylinder and ultimate velocity of falling particle will experience considerable increase and decrease with growth of power-law non-Newtonian behaviour index, respectively.*

Key Words Immersed boundary method; Lattice Boltzmann method; Direct numerical simulation; Power-law non-Newtonian fluids; Square cross-section.

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۴/۲/۳۰ و تاریخ پذیرش آن ۹۴/۷/۱۴ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v28i1.46922

(۱) نویسندهٔ مسئول: استادیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه بجنورد. a.amiri@ub.ac.ir

(۲) استاد، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود.

(۳) دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود.

مقدمه

جریـان‌هـای ذره‌ای کاربردهـای گسـترده‌ای در صـنایع مختلف و تحقیقات علمی نظیر مهندسی شیمی (ماننـد بسـترهای سـیال در رآکتورهـای شـیمیایی و شـکافت هیدرولیکی مخازن)، بیولوژی (مانند گرفتگی رگ‌هـا و حرکت گلبـول هـای قرمـز در شـریان‌هـا و وریـدها)، زمین‌شناسی و علوم مـرتبط بـا محـیط زیسـت (ماننـد طوفـان‌هــای شــنی، حرکــت ذرات معلــق در بســتر رودخانه‌ها) و غیره دارد. اهمیت و کاربرد گستردهٔ ایـن نوع جریانات منجر به تحقیقات گستردهٔ آزمایشگاهی و عددی در زمینهٔ اثرات متقابل ذره و سیال گردیده است [1]. اگرچه کارهای زیادی در زمینهٔ جریان‌هـای ذره‌ای در سـیالات نیـوتنی انجـام شـده اسـت امـا تحقیقـات انجام‌شده برای سیالات غیرنیـوتنی بسـیار کمتـر مـورد توجه قرار گرفته‌اند. این در حالی است کـه بسـیاری از جریــان‌هــای ذره‌ای نظیــر حرکــت ذرهٔ صــلب درون محلول‌های پلیمری و یا مذاب‌ها، حرکـت ذرات درون سیالات بیولوژیـک بایسـتی بـا در نظـر گـرفتن بحـث سیالات غیرنیوتنی مورد مطالعه قرار گیرند. آن‌چـه کـه ضرورت بررسی جریان‌های غیرنیوتنی ذره‌ای را بیشـتر نمایان می‌کنـد، پیچیـدگی‌هـای بسـیاری اسـت کـه در حرکت ذره درون سیال غیرنیوتنی وجـود دارد و رفتـار آن را تا حدود زیادی متمـایز از حرکـت متنـاظرش در سیال نیوتنی می‌نماید [2]. شایان ذکـر اسـت کـه اکثـر کارهای انجام شده در مورد حرکت ذره چـه در سـیال نیوتنی و چه در سـیال غیرنیـوتنی در هندسـهٔ دایـروی بوده است. این در حالی است که در کاربردهای واقعی، هندسه‌های غیر دایروی نیز سـهم بسـزایی را بـه خـود اختصاص داده‌اند کـه ضـرورت پـرداختن بـه حرکـت ذرات بـا هندسـه‌هـای متفـاوت نظیـر ذرات مربعـی را آشکار می‌سازد. در مـورد حـل جریـان‌هـای ذره‌ای تـا کنون سه رویکرد مختلف ارائه شده است [3]:

۱) مــدل پیوســته (The continuum model)، ۲) مــدل ذره‌ای گسســته‌ای (Discrete particle model) و ۳) مدل شبیه‌سازی عـددی مسـتقیم (The direct numerical solution). در روش اول هم فـاز سیال و هم فاز جامد به‌صورت یک مدل پیوسته درنظر گرفته می‌شوند که البته نیازمند مشخص بـودن ضـریب پسا و ویسکوزیتهٔ ظاهری فاز جامد می‌باشـد. در روش دوم، معادلات حرکت لاگرانـژی بـه‌صـورت جداگانـه برای محاسبهٔ سرعت و مکان فاز جامد به‌کـار مـی‌رود. در این روش، اثر وجود ذرات متحرک از طریق اضـافه نمودن عبارات نیرویی به معادلات پیوستگی و مومنتوم به میدان سیال منتقل مـی‌شـود. در روش سـوم، میـدان سیال توسط معادلات ناویر استوکس مشخص می‌شـود در حالی‌که حرکت جسم جامد به‌صورت هم‌زمان و بـا استفاده از مسئلهٔ مقدار اولیه بررسـی مـی‌شـود [4]. در خصوص جریان‌های ذره‌ای غیرنیـوتنی، روش عـددی مستقیم می‌تواند به‌عنوان بهترین گزینه مطرح باشد زیرا این توانایی شبیه‌سازی تمامی اثرات غیرخطی ایجادشده به‌دلیل وجود جسم جامد در سـیال غیرنیـوتنی را دارد. روش شبیه‌سازی عددی مسـتقیم مـی‌توانـد بـه‌آسـانی اثرات پارامترهایی نظیر اینرسـی، رقیـق‌شـوندگی و یـا الاستیسیتی را به‌صورت جزءبه‌جزء بررسـی نمایـد کـه منجر به فهم بهتر مکانیزم حرکـت ذرات داخـل سـیال نیوتنی و غیرنیـوتنی خواهـد گردیـد [5]. شـبیه‌سـازی مستقیم جریان‌های ذره‌ای ابتدا توسط هـو و همکـاران [6] انجـام گرفـت و پـس از آن پیشـرفت‌هـای قابـل توجهی در این خصوص انجام شده است.

مسـئلهٔ شـبیه‌سـازی مسـتقیم جریـان‌هـای ذره‌ای مـی‌توانـد بـه دو زیرمجموعـه تقسـیم گـردد [7]: ۱) رویکـرد شـبکهٔ متحـرک (The moving mesh approach) که در آن شبکه مش‌بندی شدهٔ منطبـق بـا جسم با حرکت ذره بازسـازی مـی‌شـود و ۲) رویکـرد شبکهٔ ثابت (The fixed mesh approach) که در آن مش محاسباتی بدون حرکت باقی می‌ماند. کاملاً واضح

است که شیوهٔ اول بسیار زمان‌بر است زیرا در هر گام زمانی، یک مش جدید منطبق بر تمامی مرزهای موجود در مسئله بایستی ایجاد گردد. دو مورد از متداول‌ترین روش‌های منطبق بر رویکرد اول و دوم به‌ترتیب روش اویلری-لاگرانژی قراردادی (Arbitrary Langrangian Eulerian method) [8] و روش دامنهٔ مجازی (Fictitious domain method) است [9-11]. هو [8] یک روش عددی بر پایهٔ تکنیک المان محدود گالرکین و روش اویلری-لاگرانژی قراردادی برای شبیه‌سازی حرکت ذرات جامد در داخل جریان سیال نیوتنی ارائه داده است. این روش بر پایهٔ شبکه‌های غیرساختاریافتهٔ متحرکی استوار است که در هر گام زمانی بر پایهٔ سرعت محاسبه‌شدهٔ مش به‌روز می‌شوند. اما اگر هرگونه نقصی در یکی از المان‌های شبکه مشاهده شود، بایستی از ابتدا عمل مش‌بندی انجام شود که هیچ‌گونه وابستگی به مش قدیمی‌تر ندارد و البته میدان سیال نیز بایستی با این مش جدید دوباره تطابق داده شود. کاملاً واضح است که این مراحل بسیار وقت‌گیر است. پاتانکار و همکاران [9] یک الگوریتم جدید بر پایهٔ روش دامنهٔ مجازی برای جریان ذره‌ای داخل سیال نیوتنی ارائه داده‌اند. در روش عددی ارائه شده توسط آنها، تانسور نرخ کرنش در گره‌های سیالی که در داخل دامنهٔ جامد قرار دارند مساوی صفر فرض شده‌اند. این فرمولاسیون جدید حتی برای حالتی که جرم سیال و جرم جامد برابر باشند، مناسب است. یک روش دامنه مجازی توسط گلووانسکی و همکاران [10] معرفی شده است که می‌تواند جریان‌های غیرقابل تراکم نیوتنی گذرنده از روی اجسام جامد متحرک را شبیه‌سازی کند. آنها نشان دادند که روش آنها اجازه مدل‌سازی مستقیم پدیده‌های پیچیدهٔ مرتبط با جریان ذره‌ای را دارد. یک روش مرز مجازی چندشبکه‌ای برای شبیه‌سازی مستقیم جریان‌های ذره‌ای در حالت دوبعدی توسط ون و تورک [11] ارائه شده است. در روش آنها جریان با استفاده از شیوه المان محدود چند شبکه‌ای حل شده است. آنها بیان داشته‌اند که روش آنها مستقل از شکل، اندازه و تعداد ذرات است.

اخیراً بعضی روش‌های جدید بر پایهٔ ایدهٔ مرز غوطه‌ور پسکین [12] گسترش یافته‌اند، که به‌طرز موفقی برای جریان‌های ذره‌ای عمل می‌نمایند. روش مرز غوطه‌ور (Immersed boundary method) می‌تواند به‌عنوان ساده‌ترین روش در گروه رویکردهای مش ثابت درنظر گرفته شود. این روش ابتدا برای شبیه‌سازی حرکت ماهیچه‌های قلب و جریان خون ناشی از آن معرفی گردید و پس از آن به‌کاربردهای مختلفی از جمله جریان‌های ذره‌ای گسترش یافت. در حالت کلی، روش مرز غوطه‌ور می‌تواند به‌عنوان یک روش غیرمنطبق بر جسم معرفی شود که شرط مرزی عدم لغزش را با اعمال یک عبارت چگالی نیرویی (Force density) به معادلات حاکم سیال ارضا می‌کند. از نقطه‌نظر عددی، میدان سیال در این روش به‌صورت یک شبکه اویلری ثابت درنظر گرفته می‌شود که تمام دامنهٔ حل شامل داخل و خارج ذرات را در بر می‌گیرد و از طرفی دیگر ذرات توسط گره‌های لاگرانژی جداگانه ردیابی می‌شوند. نقاط لاگرانژی روی مرز جسم غوطه‌ور قرار دارند و جرمی معادل جرم کل جسم غوطه‌ور را دارا می‌باشند. میدان جریان اویلری در روش مرز غوطه‌ور می‌تواند با حل معادلات ناویر استوکس با استفاده از روش‌های متداول محاسبات عددی مانند روش تفاضل محدود و یا روش حجم محدود حل شود و یا تکنیک‌های عددی جایگزین مانند روش شبکهٔ بولتزمن (Lattice Boltzmann method) را استفاده نماید.

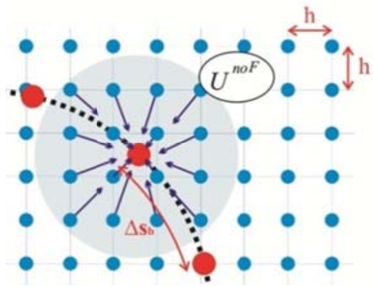
روش شبکهٔ بولتزمن خصوصیات منحصربه‌فردی مانند سادگی، قابلیت موازی سازی، عملگرهای ساده جبری و سرعت بالا را داراست که آن را از سایر روش‌های متداول محاسباتی متمایز می‌نماید. مفاهیم بنیادی این روش و کاربردهای آن برای دینامیک

سیالات محاسباتی توسط سوشی [13] ارائه گردیده است. روش شبکهٔ بولتزمن پیشرفت‌های زیادی در زمینهٔ شبیه‌سازی جریان‌های سیال نیوتنی در سال‌های اخیر داشته است. برخلاف سیالات نیوتنی، ویسکوزیته سیالات غیرنیوتنی تابعی از تنش برشی است که می‌تواند منجر به بروز ناپایداری در روند حل گردد [14]. از آن‌جایی که روش شبکهٔ بولتزمن براساس تئوری انرژی جنبشی استوار است، قادر است که نرخ برش محلی را با دقت مرتبهٔ ۲ (به‌صورت مستقل از میدان سرعت ماکروسکوپیک) محاسبه نماید [15]. این ویژگی به پایداری بیشتر حل جریان‌های ذره‌ای در سیالات غیرنیوتنی کمک شایانی می‌کند. اوهارنو و رتمن [16] توانایی روش شبکهٔ بولتزمن در حل جریان‌های غیرنیوتنی توانی را برای اولین بار نشان دادند. لَد [17] اولین کسی بود که روش شبکهٔ بولتزمن را برای بررسی جریان‌های ذره‌ای در محلول‌ها به‌کار برد. از آن به بعد مطالعات زیادی درخصوص شبیه‌سازی جریان‌های ذره‌ای با روش شبکهٔ بولتزمن ارائه شده است. در این روش، برهم‌کنش بین سیال و جامد از طریق قانونی موسوم به «بازگشت به عقب» (Bounce-back) انجام می‌شود [17]. در این روش گره‌های مرزی از طریق مجموعه‌ای از گره‌های میانی نشان داده می‌شود، که بایستی بین گره‌های سیال و جامد قرار داشته باشند. اگرچه روش LBM مشکل پروسهٔ مش مجدد را که در روش‌های معمول محاسباتی وجود دارد حل کرده است، اما هنوز از مشکلات دیگری نظیر نوسانات نیروی محاسبه‌شده در سطح ذره، نیاز به تعداد زیاد نقاط مرزی برای نمایش مرزهای فیزیکی دقیق، الگوریتم قدم‌به‌قدم و محدودیت عدد رینولدز پایین رنج می‌برد [1,3]. درواقع می‌توان گفت، شبیه‌سازی شبکهٔ بولتزمن برای جریان‌های ذره‌ای بسیار شبیه به روش‌های مش متحرک است [7].

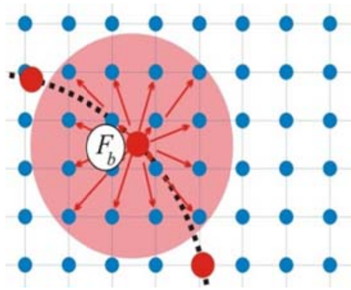
خصوصیت مشترک «شبکهٔ کارتزین ثابت» برای دو روش شبکهٔ بولتزمن و مرز غوطه‌ور محققان را بر آن داشت تا مجموع این دو روش را به‌عنوان یک روش ترکیبی و کارآمد معرفی نمایند. فنگ و میخائیلدز [1]، اولین محققانی بودند که روش مرز غوطه‌ور–شبکهٔ بولتزمن (IB-LBM) را معرفی نمودند. در روش آن‌ها وجود مرز غوطه‌ور از طریق روش پنالتی (Penalty method) اعمال می‌شد که مرزهای صلب را به‌صورت انعطاف‌پذیر با ثابت سختی بالا درنظر می‌گرفت. هم‌چنین آنها یک مطالعهٔ مقایسه‌ای با روش‌های شبکهٔ بولتزمن متداول انجام دادند. آنها نشان دادند که IB-LBM معرفی‌شده نوسانات نیرویی را که در روش‌های متداول LBM معمول بود از خود بروز نمی‌دهد.

در مورد شبیه‌سازی جریان‌های ذره‌ای، الگوریتم محاسبهٔ نیروی مرزی بسیار تأثیرگذار است، زیرا این نیرو نقش مهمی در محاسبات مربوط به معادلات حرکت ذره ایفا می‌کند. تاکنون، سه الگوریتم متفاوت در قالب روش IB-LBM برای این منظور استفاده شده است: ۱) روش اعمال نیروی فیدبک (Feed-back forcing method) [1]، ۲) روش اعمال نیروی مستقیم (Direct-forcing method) [2,3] و ۳) روش تبادل مومنتوم (Momentum exchange method) [18]. در روش اول، از پروسه‌های فیدبک براساس مکان (و/یا سرعت) نقاط روی مرز برای تعیین چگالی نیروی مرزی استفاده می‌شود [1]. روش اعمال نیروی مستقیم ابتدا توسط موحد یوسف [19] برای شبیه‌سازی مرزهای پیچیدهٔ ثابت ارائه شد. فنگ و میخائیلدز [3] یک روش IB-LBM با اعمال نیروی مستقیم برای شبیه‌سازی جریان‌های ذره‌ای ارائه دادند. با استفاده از این روش جدید، دیگر نیازی به تعیین پارامترهای آزاد مانند ضریب سختی در روش پنالتی وجود ندارد. نیو و همکاران [18] یک روش IB-LBM براساس اصل تبادل مومنتوم برای شبیه‌سازی جریان‌های لزج ارائه داده‌اند. در روش آنها، عبارت نیرویی براساس اصل تبادل

مومنتوم برای توابع توزیع احتمال چگالی در نقاط مرزی میان‌یابی شده، محاسبه می‌شود. اگرچه که آنها از روش LBM با زمان آسایش چندگانه استفاده کردند، اما دقت روش تغییر چندانی نکرده است. هم‌چنین در این روش، چگالی نقاط مرزی لاگرانژی حتماً بایستی بیشتر از نقاط اویلری روی شبکهٔ کارتزین باشد تا از نشتی جلوگیری شود.



(الف)



(ب)

شکل ۱ الف) انتقال سرعت از گره‌های اویلری به نقاط لاگرانژی و ب) توزیع چگالی نیروی مرزی از نقاط لاگرانژی به گره‌های اویلری، ناحیهٔ سایه‌زده شده محدوده‌ای از گره‌های اویلری را نشان می‌دهد که تحت تأثیر یک گره لاگرانژی قرا گرفته است

همان‌گونه که در شکل (۱) مشاهده می‌شود، به دلیل عدم تطابق نقاط مرزی (لاگرانژی) و گره‌های محاسباتی سیال (اویلری) یک الگوریتم واسط بایستی تعریف شود تا ارتباط بین گره‌های مرزی و سیال را فراهم کند. در مورد IB-LBM با اعمال نیروی مستقیم، الگوریتم‌های واسطی که تاکنون استفاده شده است را در دو گروه می‌توان تقسیم‌بندی کرد. (۱) الگوریتم واسط شارپ (sharp interface scheme) [20] و (۲) الگوریتم واسط دیفیوز (diffuse interface scheme) [20, 21]. تفاوت عمدهٔ الگوریتم دیفیوز و شارپ در محل گره‌های اعمال نیرو است. در الگوریتم شارپ، نقاط مورد استفاده برای اعمال نیرو در گره‌های اویلری محاسباتی قرار دارند درحالی‌که الگوریتم واسط دیفیوز نقاط لاگرانژی را برای محاسبهٔ چگالی نیرویی استفاده می‌کند. کنگ [22] مطالعهٔ کاملی درخصوص الگوریتم‌های شارپ و دیفیوز و مقایسه بین آنها انجام داده است. او گزارش داده است که هم الگوریتم شارپ و هم الگوریتم دیفیوز می‌توانند برای شبیه‌سازی مرزهای متحرک به‌کار روند اما الگوریتم میان‌یابی شارپ نوسانات نادرست در نیروی مرزی تولید می‌کند. کنگ [22] پیشنهاد می‌کند که الگوریتم شارپ بیشتر برای شبیه‌سازی مرزهای ثابت پیچیده و یا مسائل مرز متحرک با سرعت کم استفاده شود.

تاکنون چند مطالعه با رویکرد شبیه‌سازی عددی مستقیم برای جریان‌های ذره‌ای در سیالات غیرنیوتنی انجام شده است که محدود به روش اویلری لاگرانژی قراردادی [23] و روش دامنه مجازی [24] هستند. امیری دلوئی و همکاران [21] از روش مرز غوطه‌ور- شبکهٔ بولتزمن برای مدل‌سازی جریان از روی موانع ثابت دایروی استفاده کرده‌اند.

هدف اصلی این مطالعه، توسعهٔ روش مرز غوطه‌ور- شبکهٔ بولتزمن غیرنیوتنی (IB-NLBM) با اعمال نیروی مستقیم برای شبیه‌سازی حرکت مرزهای متحرک در سیالات غیرنیوتنی رقیق‌برشی و ضخیم‌برشی است. از آنجایی‌که اکثر کارهای مشابه قبلی منحصر به حرکت ذرات با سطح مقطع دایروی بوده‌اند، در مطالعهٔ حاضر به بررسی حرکت ذرات مربعی نیز پرداخته شده است. در این تحقیق حرکت ذرات نتیجهٔ برهم کنش بین جامد و سیال، نیروهای حجمی مانند نیروی وزن و هم‌چنین نیروی اضافی ناشی از شتاب ذره است. روش ارائه شده در این

تحقیق شامل موارد زیر است:

۱) روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم که یک روش اویلری-لاگرانژی با شبکهٔ غیرمنطبق بر جسم است. این روش قادر است اثرات غیرخطی ناشی از حضور ذرات در سیال غیرنیوتنی را تعیین کند و یک درک مستقیم از مکانیک محلول‌های غیرنیوتنی ارائه دهد.

۲) روش شبکهٔ بولتزمن که بر پایهٔ تئوری انرژی جنبشی گازها استوار است و قادر است نرخ برش محلی را با دقت مرتبهٔ دو برای سیالات غیرنیوتنی (با ویسکوزیتهٔ متغیر) محاسبه نماید.

۳) مدل توانی (power-law model) که معمول‌ترین مدل غیرنیوتنی مورد استفاده است و می‌تواند به طرز قابل قبولی خواص رقیق‌برشی و ضخیم‌برشی را در محدودهٔ متوسطی از نرخ‌های برش محاسبه نماید. ٤) الگوریتم واسط چهار نقطه‌ای که یک روش میان‌یابی مناسب برای ارتباط مناسب بین نقاط متحرک لاگرانژی و گره‌های ثابت اویلری است بدون این‌که مشکل ناپایداری و یا نوسانات نادرست ایجاد شود (شکل ۱).

۵) الگوریتم اعمال نیروی چندمرحله‌ای که قابلیت بازیابی معادلات ناویر استوکس را با دقت مرتبهٔ دو داراست [25].

٦) معادلات حرکت ذره که اثرات نیروی اضافه شده ناشی از وجود جرم شتاب‌دار را نیز لحاظ می‌کند.

در مطالعهٔ حاضر، تمام روش‌های ذکر شده در بالا با یکدیگر ترکیب شده‌اند تا یک حل عددی مستقیم برای شبیه‌سازی جریان سیال غیرنیوتنی ذره‌ای به‌دست آید که تمام خواص لیست‌شده در بالا را دارا باشد. برای صحت‌سنجی کار حاضر یک روش گام‌به‌گام شامل جریان سیال غیرنیوتنی در کانال، جریان سیال نیوتنی از روی مانع با سطح مقطع مربعی و سقوط ذرهٔ دایره‌ای در سیال نیوتنی استفاده شده است. در ادامه مسئلهٔ جریان سیال غیرنیوتنی نامحدود از روی سیلندر ثابت با سطح مقطع مربعی شبیه‌سازی شده است، تا اثرات متفاوت خواص غیرنیوتنی رقیق‌برشی و ضخیم‌برشی بر نیروهای وارد بر ذرات غوطه‌ور بررسی گردد. هم‌چنین مسئلهٔ سقوط یک ذرهٔ مربعی در سیال غیرنیوتنی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است و نحوهٔ تغییر سرعت این ذرات نسبت به خواص غیرنیوتنی سیال به تفصیل بحث شده است.

روش عددی

روش مرز غوطه‌ور - شبکهٔ بولتزمن غیر نیوتنی با اعمال نیروی مستقیم. معادلهٔ شبکهٔ بولتزمن برای میدان سرعت شامل یک عبارت نیرویی خارجی ناپایا و غیریکنواخت (به‌دلیل وجود مرز جامد) در بعد زمان (t) و مکان $(\vec{x})$ به‌صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود [25]:

$$f_i\left(\vec{x}+\vec{e}_i\Delta t,t+\Delta t\right)= f_i\left(\vec{x},t\right)-\frac{1}{\tau}\left[f_i\left(\vec{x},t\right)-f_i^{(eq)}\left(\vec{x},t\right)\right]+F_i\left(\vec{x},t\right)\Delta t, \quad (۱-۱)$$

$$f_i^{(eq)}= w_i\,\rho\left[1+\frac{3}{c^2}\left(\vec{e}_i.\vec{u}\right)+\frac{9}{2c^4}\left(\vec{e}_i.\vec{u}\right)^2-\frac{3}{2c^2}\vec{u}^2\right] \quad (۲-۱)$$

$$F_i\left(\vec{x},t\right)=\left(1-\frac{1}{2\tau}\right)w_i\times \left[3\frac{\vec{e}_i-\vec{u}\left(\vec{x},t\right)}{c^2}+9\frac{\vec{e}_i.\vec{u}\left(\vec{x},t\right)}{c^4}\vec{e}_i\right].\vec{F}\left(\vec{x},t\right), \quad (۳-۱)$$

$$\rho\vec{u}=\sum_i\vec{e}_i f_i+\frac{\Delta t}{2}\vec{F} \quad (٤-۱)$$

که $\vec{e}_i$ بردار سرعت ذره در جهت iام سرعت شبکه است. در کار حاضر از مدل شبکهٔ بولتزمن دوبعدی با نه جهت سرعت مستقل (D2Q9) استفاده شده است. $f_i(\vec{x},t)$ و $F_i(\vec{x},t)$ به‌ترتیب توزیع چگالی ذره و تابع توزیع گسسته نیروی خارجی در جهت iام است. زمان

آسایش بی‌بعد (τ)، نرخی را نشان می‌دهد که توزیع چگالی ذره به حالت تعادل محلی $f_i^{(eq)}$ می‌رسد. $\rho\vec{u}$ چگالی مومنتوم سیال را نشان می دهد. سرعت‌های ذره محلی به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$[\vec{e}_i]=c\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$ (۲)

که c سرعت شبکه است. ضرایب وزنی نیز به‌صورت $w_1=w_2=w_3=w_4=1/9$، $w_5=w_6=w_7=w_8=1/36$ و $w_0=4/9$ تعریف می‌شود. به‌منظور درنظر گرفتن اثرات هم‌زمان شبکهٔ گسسته‌شده و عبارت نیرویی اضافه‌شده در معادلهٔ ممنتوم سیال از الگوریتم اعمال نیروی چندمرحله‌ای استفاده شده است. توضیحات کامل‌تر در این خصوص را می‌توان در مطالعهٔ امیری دلوئی و همکاران [21] مشاهده نمود. با استفاده از بسط چاپمن-اینسکاک مرتبهٔ اول، ویسکوزیتهٔ دینامیکی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\nu=(2\tau-1)/6$$ (۳)

ویسکوزیتهٔ شبکه نقشی مستقیم روی گام زمانی حل (Δt_{phy}) بازی می‌کند:

$$\Delta t_{phy}=\left(\Delta x_{phy}\right)^2\frac{\nu}{\nu_{phys}}$$ (٤)

که Δx_{phy} و ν_{phy} به‌ترتیب اندازهٔ شبکه و ویسکوزیتهٔ دینامیکی (در مقیاس فیزیکی واقعی) می‌باشند.

در سیالات نیوتونی ویسکوزیته در تمامی نرخ برش‌ها عددی ثابت است در حالی‌که سیالات غیرنیوتونی از یک رابطهٔ غیرخطی بین تنش برشی و نرخ کرنش برشی، مخصوصاً در نرخ برش پایین، پیروی می‌کنند.

مدل توانی یکی از معمول‌ترین مدل‌های غیرنیوتنی است که برای بیان رفتار سیالات غیرنیوتنی استفاده می‌شود. در این مدل غیرنیوتنی رابطهٔ بین ویسکوزیته و نرخ کرنش برشی به‌صورت زیر است [27]:

$$\nu=m\left|\dot{\gamma}\right|^{n-1},$$ (۵)

که m و n به‌ترتیب شاخص سازگاری و شاخص رفتار غیرنیوتنی هستند. ویسکوزیته سیال با افزایش شاخص m زیاد می‌شود. هنگامی که $n<1$ است، ویسکوزیتهٔ سیال با افزایش نرخ برش کاهش خواهد یافت. سیالاتی با چنین رفتاری را به‌عنوان سیالات شبه‌پلاستیک یا رقیق‌برشی معرفی می‌کنند. از سویی دیگر هنگامی که $n>1$ است، ویسکوزیته با افزایش نرخ کرنش زیاد خواهد شد که چنین سیالاتی به سیالات دیلاتنت یا ضخیم‌برشی معروف هستند. در حالت خاص $n=1$ و $m=\mu_0$، سیال رفتاری نیوتنی خواهد داشت. در مورد سیالاتی با ویسکوزیتهٔ وابسته به نرخ برش، τ می‌تواند از ثابت دوم تانسور نرخ کرنش به‌دست آید:

$$\dot{\gamma}=2\sqrt{D_{ll}}$$ (٦)

که

$$D_{ll}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}S_{\alpha\beta}S_{\alpha\beta},$$ (٧)

مقادیر برش در هر نقطه بایستی محاسبه گردد. تانسور نرخ کرنش در حضور نیروی خارجی می‌تواند به‌صورت ماکروسکوپیک (معادلهٔ ۸-۱) [28] و یا مزوسکوپیک (معادلهٔ ۸-۲) به‌دست آید:

$$S_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\nabla_\beta u_\alpha+\nabla_\alpha u_\beta\right).$$ (۱-۸)

$$S_{\alpha\beta}=-\frac{1}{\tau 2c_s^2\rho\Delta t}\times\left(\sum_{i=0}^{8}c_{i\alpha}c_{i\beta}f_i^{(neq)}+\frac{1}{2}(u_\alpha F_\beta+u_\beta F_\alpha)\Delta t\right) \quad (۲-۸)$$

معادلهٔ (۸-۲) از بسط چاپمن-اینسکاک قابل استخراج است. در این مطالعه، به‌منظور مطالعهٔ اثرات حضور جسم غوطه‌ور روی دامنهٔ سیال از روش اعمال نیروی مستقیم استفاده شده است. سرعت دل‌خواه بایستی شرایط عدم لغزش روی مرز را تأمین کند. با درنظر گرفتن این حقیقت و هم‌چنین الگوریتم اعمال نیروی چندمرحله‌ای که برای حل میدان سرعت سیال استفاده شده است، فرمول مربوط به اعمال نیروی مستقیم به‌دست خواهد آمد [20]:

$$\vec{F}_b\left(\vec{x}_b,t+\Delta t\right)=2\rho\left(\vec{x}_b,t+\Delta t\right)\frac{\vec{U}^d-\vec{u}_b^{noF}\left(\vec{x}_b,t+\Delta t\right)}{\Delta t} \quad (۹)$$

که u^d و u_b^{noF} به‌ترتیب سرعت دل‌خواه جسم غوطه‌ور و سرعت قبل از اعمال نیرو در گره‌های لاگرانژی هستند. هم‌چنین $\vec{x}_b$ مختصات مربوط به نقاط لاگرانژی روی مرز غوطه‌ور را نشان می‌دهد. با توجه به این‌که گره‌های اعمال نیرو روی گره‌های محاسباتی قرار دارند و لزوماً روی مرز جسم جامد نیستند، یک الگوریتم واسط برای به‌دست آوردن سرعت در گره‌های محاسباتی (باتوجه به شرط عدم لغزش روی مرز جامد) مورد نیاز است. الگوریتم واسط می‌تواند با درنظر گرفتن توابع توزیع گسسته (δ_h) به‌دست آید. تابع توزیع گسسته با استفاده از تابع دلتای دیراک (ϕ) تعریف می‌شوند. پسکین [29] مطالعات کامل و جامعی درخصوص نحوهٔ ساخت δ_h و اصول مشخصی که باید رعایت شود، ارائه داده است. مطابق با مطالعات پسکین [29]، در شبیه‌سازی‌های دوبعدی، δ_h می‌توانند به‌صورت حاصل‌ضرب دو تابع تک متغیره (که با اندازهٔ طولی شبکهٔ h بی‌بعد شده‌اند) بیان شود.

$$\delta_h\left(\vec{x}\right)=1/h^2\,\phi(x_1/h)\times\phi\left(x_2/h\right). \quad (۱-۱۰)$$

که x_1 و x_2 مؤلفه‌های کارتزین بردار مکان هستند. در کار حاضر از الگوریتم میان‌یابی چهارنقطه‌ای که توسط پسکین [29] پیشنهاد شده است بهره برده‌ایم:

$$\phi(r)=\begin{cases}1/8(3-2|r|+\sqrt{1+4|r|-4r^2}), & 0\le|r|<1,\\ 1/8(5-2|r|-\sqrt{-7+12|r|-4r^2}), & 1\le|r|<2,\\ 0, & Otherwise,\end{cases} \quad (۲-۱۰)$$

همان‌گونه که در شکل (۱) نشان داده شده است، تنها تعداد محدودی از گره‌های اویلری تحت تأثیر هر کدام از نقاط لاگرانژی قرار دارد. شایان ذکر است که δ_h در دو مرحله مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ اولاً برای انتقال سرعت‌ها قبل از اعمال نیرو از گره‌های اویلری به نقاط لاگرانژی،

$$\vec{u}_b^{noF}=\sum\vec{u}^{noF}\delta_h\left(\vec{x}-\vec{x}_b\right)h^2, \quad (۱-۱۱)$$

و محاسبهٔ چگالی نیروی مرزی در نقاط لاگرانژی (معادلهٔ ۹) و ثانیاً برای توزیع چگالی نیروی مرزی به‌دست آمده از نقاط لاگرانژی به نقاط اویلری مجاور،

$$\vec{F}=\sum\vec{F}_b\,\delta_h\left(\vec{x}-\vec{x}_b\right)\Delta s_b, \quad (۲-۱۱)$$

و استفاده در معادلهٔ (۱-٤) که سرعت‌های جدید بعد از اعمال نیرو را نشان می‌دهند. شایان ذکر است که متغیر u^{noF} در معادلهٔ (۱۱-۱)، نشانگر سرعت‌ها در گره‌های اویلری است که در حالت عدم حضور ترم نیروی

حجمی به‌دست آمده‌اند ($\vec{u}^{noF}=\frac{1}{\rho}\sum_i \vec{e}_i f_i$). قبل از پایان این قسمت بایستی بیان داشت که نیروی سطحی وارد بر مرز غوطه‌ور به‌راحتی توسط رابطهٔ زیر قابل بیان است [20]:

$$\vec{F}_s=-\sum \vec{F}_b\left(\vec{x}_b,t+\Delta t\right)\Delta s_b \\ =\sum \vec{F}\left(\vec{x},t+\Delta t\right)h^2, \qquad (۱۲)$$

که Δs_b فاصلهٔ بین نقاط لاگرانژی واقع در روی منحنی مرز غوطه‌ور می‌باشد (به شکل ۱-الف مراجعه شود). در ضمن تفاوتی بین برآیند اولی و یا دومی در معادلهٔ (۱۲) وجود ندارد. بایستی توجه نمود که عبارت $\vec{F}\left(\vec{x},t+\Delta t\right)$ روی تمامی نقاط اویلری و عبارت $\vec{F}_b\left(\vec{x}_b,t+\Delta t\right)$ برای تمام نقاط لاگرانژی محاسبه می‌شوند.

معادلات حرکت ذرهٔ شتابدار. برخلاف روش‌های شبکهٔ بولتزمن متداول برای شبیه‌سازی حرکت ذرات، در روش IB-LBM، ذره می‌تواند به‌صورت پیوسته درون دامنه محاسباتی حرکت کند بدون این‌که نگرانی درخصوص مکان گره‌های اویلری متناظر وجود داشته باشد. درواقع، در روش IB-LBM ذره با یکسری گره‌های لاگرانژی که دارای وزنی معادل با کل جسم غوطه‌ور هستند، جای‌گزین می‌شود. برای شبیه‌سازی حرکت ذره، بایستی معادلات حرکت ذره مد نظر قرار گیرد. معادلهٔ نیوتنی حرکت ذرهٔ خطی به‌صورت زیر نوشته می‌شود [22]:

$$M_s\frac{d\vec{U}_c}{dt}=-\int_A \vec{\sigma}.d\vec{A}+\left(\rho_s-\rho_f\right)V_s\vec{g} \qquad (۱۳)$$

که $\vec{U}_C$ بردار سرعت مرکز جرم ذره می‌باشد. M، A، V و ρ به‌ترتیب جرم، سطح، حجم و چگالی ذره را نشان می‌دهند. همچنین زیرنویس‌های f و s به‌ترتیب نشانگر جامد و مایع می‌باشد. عبارت اولی در سمت راست معادلهٔ (۱۳) نشانگر نیروی است که از طرف مایع به جامد وارد می‌شود. این نیرو شامل ۱) نیرویی که بر سطح جسم ثابت وارد می‌شود و ۲) نیروی ناشی از جرم اضافه‌شده در اثر شتاب ذره است. بنابراین داریم [22]:

$$-\int_A \vec{\sigma}.d\vec{A}=-\int_V \vec{F}_b dv+M_f.\frac{d\vec{U}_c}{dt} \qquad (۱٤)$$

همچنین معادلهٔ نیوتنی حرکت زاویه‌ای ذره به‌صورت زیر خواهد بود:

$$I_s.\frac{d\vec{\Omega}_c}{dt}=-\int_V\left(\vec{x}_b-\vec{x}_c\right)\times\vec{F}_b dV+I_f.\frac{\partial\vec{\Omega}_c}{\partial t} \qquad (۱٥)$$

که $\vec{\Omega}_c$ سرعت زاویه‌ای، $I_f=\mu_f.R_s^2$ و $\vec{x}_b$، $\vec{x}_c$ بردارهای مکان مربوط به گره‌های لاگرانژی روی دیواره و مرکز ذره می‌باشد. معادلات (۱٥ و ۱٤) به‌صورت زیر گسسته‌سازی شده‌اند [22]:

$$\vec{U}_c^{n+1}=\vec{U}_c^n+\frac{1}{M_s}\left[-\sum_b \vec{F}_b^n\Delta V_b+\left(M_s-M_f\right)\vec{g}\right]\Delta t \\ +\frac{M_f}{M_s}\left(\vec{U}_c^n-\vec{U}_c^{n-1}\right) \qquad (۱٦)$$

و

$$\vec{\Omega}_c^{n+1}=\vec{\Omega}_c^n+\frac{1}{I_s}\left[-\sum_b\left(\vec{x}_b-\vec{x}_c\right)\times\vec{F}_b^n\Delta V_b\right]\Delta t \\ +\left(\frac{I_f}{I_s}\right)\left(\vec{\Omega}_c^n-\vec{\Omega}_c^{n-1}\right) \qquad (۱۷)$$

بنابراین مکان مرکز ذره در گام زمانی $n+1$ به‌صورت زیر قابل بیان خواهد بود:

$$x_c^{n+1}=x_c^n+\frac{1}{2}\left(\vec{U}_c^{n+1}+\vec{U}_c^n\right)\Delta t \qquad (۱۸)$$

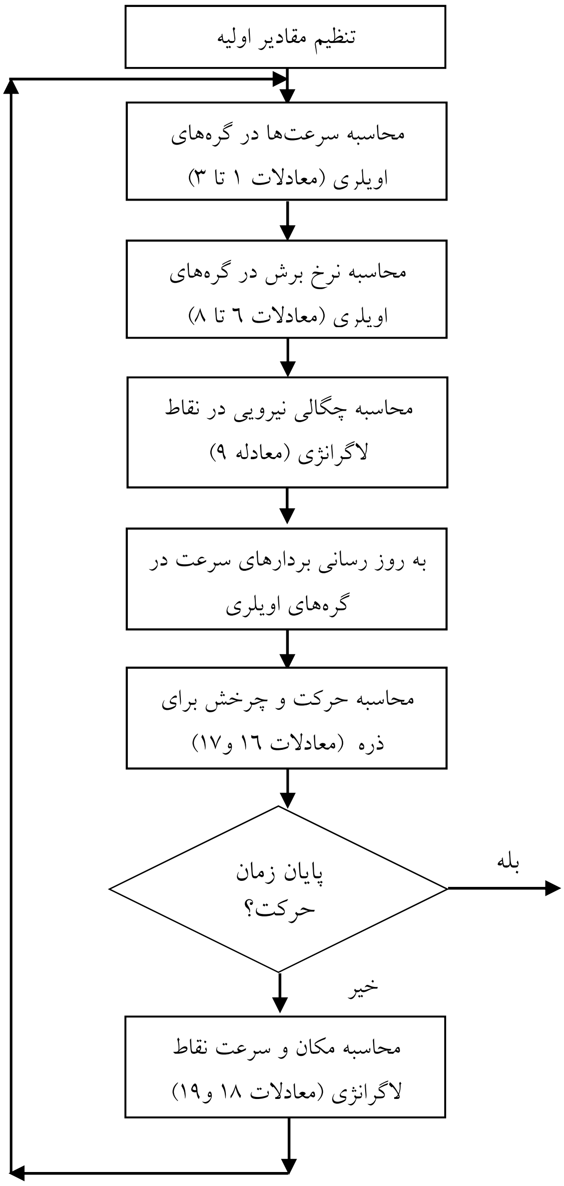
همچنین مؤلفه‌های سرعت روی نقاط لاگرانژی در

نقاط اعمال نیروی $\vec{x}_b$، در گام زمانی بعدی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{u}_b^{n+1} = \vec{U}_c^{n+1} + \vec{\Omega}_c^{n+1} \times \left(\vec{x}_b - \vec{x}_c\right) \tag{۱۹}$$

این سرعت‌های جدید در معادلهٔ اعمال نیروی مستقیم (معادله ۹) به‌کار خواهد رفت تا نیروی مرزی در گام زمانی بعد برای هر یک از گره‌های لاگرانژی محاسبه شود.

در پایان این بخش به‌طور خلاصه الگوریتم کلی روش IB-NLBM که در بخش‌های پیشین شرح داده شد در شکل (۲) نشان داده شده است.

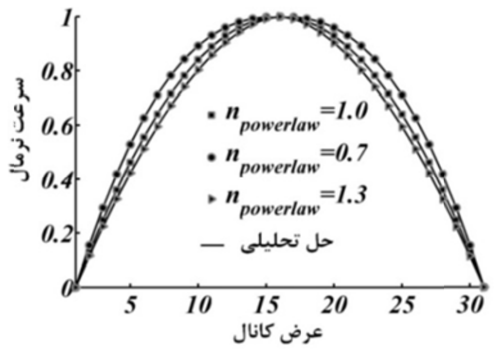


شکل ۲ الگوریتم روش IB-NLBM برای شبیه‌سازی حرکت ذره در سیال غیرنیوتنی

صحت‌سنجی

در ایــن قســمت از یــک فرآینــد گــام‌بــه‌گــام بــرای راستی‌آزمایی حل حاضر استفاده شده است کـه شـامل: ۱) جریان سیال غیرنیوتنی در کانـال، ۲) جریـان سـیال نیوتنی نامحدود از روی سیلندر با سطح مقطع مربعی و ۳) سقوط ذرهٔ دایره‌ای در یـک محفظـهٔ حـاوی سـیال نیوتنی می‌باشد.

جریــان ســیال غیرنیــوتنی در کانــال. بـه‌منظـور صحت‌سنجی بخش غیرنیوتنی حل عـددی ارائـه‌شـده، مسئلهٔ جریان سیال غیرنیوتنی در کانال که حل تحلیلـی دقیق آن موجود است [30] انتخاب شده اسـت. شـکل (۳) پروفیل سرعت سـیال در مقطـع عرضـی کانـال را نشان می‌دهد. چنان‌چـه در ایـن شـکل مشـهود اسـت، نتایج حاصل از حل حاضر و حل تحلیلی تطابق بسـیار خوبی را نشان می‌دهند.



شکل ۳ پروفیل سرعت مربوط به جریان سیال غیرنیوتنی در کانال

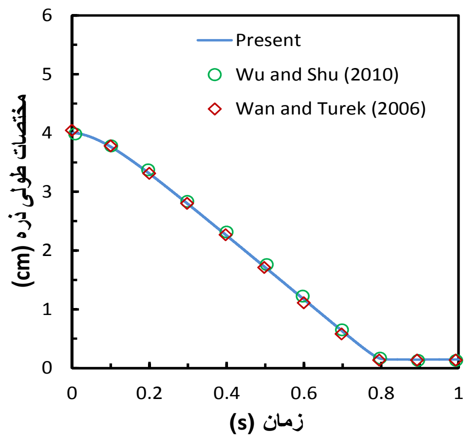
جریان سیال نیوتنی نامحدود از روی سیلندر ثابت با مقطع مربعی. با توجه به اطلاعات موجود درخصوص جریان سیال نیوتنی نامحـدود نیـوتنی از روی سـیلندر ثابت با سطح مقطع مربعـی، اسـتفاده از ایـن اطلاعـات برای صحت‌سنجی روش حاضر در مواجهه با ذره‌هـای با سطح مقطع مربعی، در دستور کار قرار گرفته اسـت. جـدول (۱) مقـادیر ضـریب پسـا را بـرای یـک ذرهٔ مربع‌شکل در معرض جریان سیال نیوتنی نشان می‌دهد. چنان‌چه از جدول (۱) برمی‌آید نتایج حاضر تطابق قابل قبولی با کارهای گذشته نشان می‌دهد.

جدول ۱ مقایسهٔ مقادیر ضریب پسا در جریان نامحدود از روی سیلندر مربعی

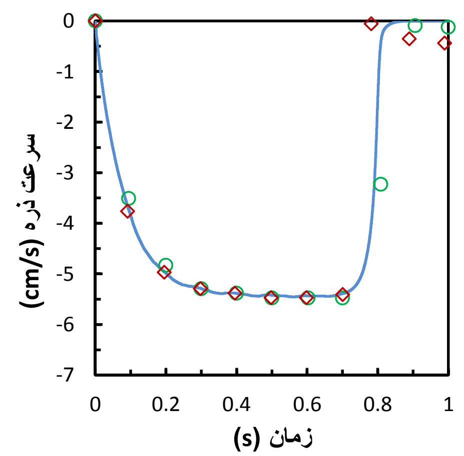
نویسنده	روش	ضریب پسا
دیهمان و همکاران [31]	حجم محدود	۱/۷٦۷
کاترجی وکاترجی [32]	حجم محدود (فلوئنت)	۱/۸۰۸
کار حاضر	IB-NLBM	۱/۷٦۳

سقوط ذرهٔ دایره‌ای در محفظهٔ حاوی سـیال نیـوتنی. مسئلهٔ سقوط ذرهٔ دایره‌ای در سیال نیوتنی به‌عنوان یـک آزمایش مبنا برای بررسی حرکت ذره در سـیال توسـط بسیاری از محققان مورد استفاده قرار گرفتـه اسـت. در کار حاضر از این مسئله برای صحت‌سـنجی معـادلات حرکت استفاده‌شده در روش مورد استفادهٔ این پژوهش بهـره بـرده‌ایـم. هندسـهٔ محفظـه شـامل یـک محفظـهٔ ۲cm × ٦cm است که توسط یـک دامنـهٔ محاسـباتی بـا ٦۰۰× ۲۰۰ گـره پوشـش داده شـده اسـت. قطـر ذره ۰/۲٥cm و چگـالی آن g/cm^3 ۱/۲٥ اسـت. ایـن محفظه بـا یـک سـیال بـا ویسـکوزیته $g/cm.s$ ۰/۱ و چگالی g/cm^3 ۱ پر شـده اسـت. ذره ابتـدا در مکـان (٤cm و ۱cm) است و از حالت سکون رها مـی‌شـود. ذره در اثر نیروی جاذبه به‌سمت پایین حرکت می‌کند و شتاب می‌گیرد تا این‌که پس از مدتی به سـرعت ثابـت حدی می‌رسد. در کار حاضر از ٥۰ نقطهٔ لاگرانژی کـه به‌صورت یکنواخت بر سطح سیلندر گسترده شـده‌انـد برای نشان دادن مرز جامد استفاده شـده اسـت. زمـان آسایش τ=۰/٦٥ درنظر گرفتـه شـده اسـت کـه معـادل $۵×۱۰^{-۵}$ ثانیه برای هر گام زمانی مـی‌باشـد. شـکل (٤) نتایج حاصل از روش حاضر را با نتایج ارائه‌شده توسط وو و شو [7] و ون و تورک [11] مقایسه می‌نماید. این

نمودارها برای مختصات طولی و سرعت ذره رسم شده‌اند. با توجه به شکل (٤) کاملاً واضح است که نتایج حاصل از کار حاضر و نتایج وو و شو [7] و ون و تورک [11] در تمامی پارامترهای ذکرشده کاملاً بر یکدیگر منطبق هستند. تفاوت‌های جزئی مشاهده‌شده در زمان‌های پایانی مربوط به مکانیزم‌های مختلف برخورد ذره- دیواره است که در هر یک از مطالعات متفاوت است. در کار حاضر از مدل برخورد ذره- دیواره بر پایهٔ تئوری لنارد-جونز [18] برای شبیه‌سازی برهم‌کنش بین ذره و دیواره استفاده شده است.



(الف)



(ب)

شکل ٤ تغییرات (الف) مختصات طولی ذره و (ب) سرعت ذره با زمان در حرکت سقوط آزاد در محفظهٔ حاوی سیال نیوتنی

نتایج و بحث

در این قسمت توانایی روش IB-NLBM با اعمال نیروی مستقیم برای شبیه‌سازی جریان‌های ذره‌ای با سطح مقطع مربعی در سیالات غیرنیوتنی مختلف مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. برای این منظور دو هندسه متفاوت شامل جریان غیرنیوتنی از روی سیلندر ثابت و سقوط ذره در کانال حاوی سیالات غیرنیوتنی در نظر گرفته شده است.

جریان سیال غیرنیوتنی نامحدود از روی سیلندر ثابت با مقطع مربعی. مسئلهٔ جریان سیال غیرنیوتنی از روی سیلندر ثابت دایروی قبلاً توسط امیری دلوئی و همکاران [21] به‌طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. همانند مطالعهٔ امیری دلوئی و همکاران [21]، هندسه این مسئله نیز شامل یک دامنهٔ محاسباتی ٦٠L×٤٠L با ١٨٠٠×١٢٠٠ گره محاسباتی برای جریان پایا و یک دامنهٔ محاسباتی ٥٠L×٤٠L با ٢٠٠٠×١٦٠٠ گره محاسباتی برای جریان ناپایا است. این دامنهٔ بزرگ به‌خوبی شرط نامحدود بودن جریان را تضمین می‌کند. L معرف طول ضلع مربع است. عدد رینولدز برای سیالات توانی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

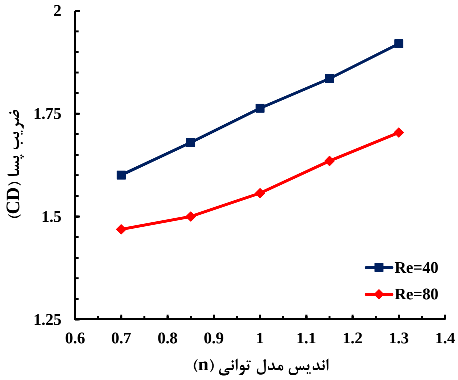
$$Re_{pl} = \frac{U_{\infty}^{(2-n)} L^{n}}{m} \qquad (٢٠)$$

که u_{∞} سرعت جریان آزاد سیال است. هم‌چنین به‌منظور بررسی دقیق‌تر اثر هندسهٔ سطح مقطع و خواص غیرنیوتنی روی دقت حل، خطای عددی روش به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$H.B.E. = \sqrt{\frac{1}{N_{ij}} \sum_{i} \sum_{j} \left(\vec{u}_{b}^{n}(i,j) - \vec{u}_{b}^{e}(i,j) \right)^{2}}, \qquad (٢١)$$

که N_{ij} نشانگر تعداد گره‌های دامنهٔ حل است. u_b^e و

u_b^n به‌ترتیب مربوط به سرعت دقیق (در حالت سیلندر ثابت این سرعت صفر خواهد بود) و سرعت ناشی از نتایج حل عددی حاضر هستند. شکل (۵) تغییرات ضریب پسای به‌وجود آمده در حرکت سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی از روی مانع مربعی برحسب شاخص رفتار غیرنیوتنی توانی را در جریان‌های پایا (Re =۴۰) و ناپایا (Re =۸۰) نشان می‌دهد. هم‌چنین جدول (۲) مقادیر خطای عددی را در جریان‌های پایا (Re =۴۰) و ناپایا (Re =۸۰) برای سیالات مختلف رقیق‌برشی، نیوتنی و ضخیم‌برشی نشان می‌دهد. چنان‌چه از شکل (۵) برمی‌آید ضریب پسا با افزایش شاخص رفتار غیرنیوتنی توانی افزایش می‌یابد. ضریب پسا در جریان سیال حول استوانه از دو بخش ضریب پسای اصطکاکی پوسته‌ای و ضریب پسای فشاری تشکیل می‌شود. ضریب پسای اصطکاکی بیشتر در مورد جریان‌های با عدد رینولدز پایین مؤثر است درحالی‌که برای جریان‌های با عدد رینولدز بالاتر (مانند بحث حاضر)، علاوه بر ضریب پسا اصطکاکی، ضریب پسای فشاری نیز حایز اهمیت است. ضریب پسای فشاری به‌دلیل پدیدهٔ جدایش جریان و ایجاد گردابه در پشت استوانه به‌وجود می‌آید. گردابهٔ ایجاد شده در پشت استوانه با افزایش شاخص رفتار غیرنیوتنی توانی، افزایش می‌یابد که منجر به افزایش مقادیر ضریب پسا می‌شود. شایان ذکر است که در حالت ناپایا، ضریب پسای متوسط محاسبه شده است. هم‌چنین، با توجه به جدول (۲) مقدار عددی خطای مرزی در سیالات با خواص رقیق‌برشی بیشتر، افزایش می‌یابد و بالعکس با حرکت به‌سمت خواص نیوتنی و سپس ضخیم‌برشی، کاهش می‌یابد. این امر به‌دلیل افزایش سرعت جریان با کاهش شاخص رفتار غیرنیوتنی توانی است. افزایش سرعت هم‌چنین باعث افزایش خطای حل در جریان‌های با عدد رینولدز بالاتر خواهد گردید.

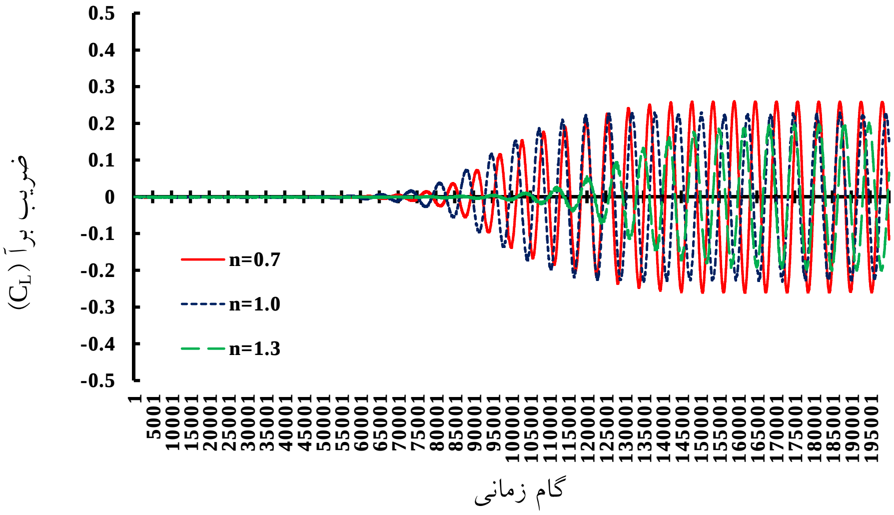


شکل ۵ ضریب پسا برای جریان سیال نیوتنی و غیرنیوتنی نامحدود از روی سیلندر مربعی در حالت پایا (Re=۴۰) و ناپایا (Re=۸۰)

جدول ۲ مقادیر خطای عددی برای جریان سیال نیوتنی و غیرنیوتنی نامحدود از روی سیلندر مربعی در حالت پایا (Re=۴۰) و ناپایا (Re=۸۰)

نوع سیال	شاخص رفتار غیرنیوتنی	Re=۴۰	Re=۸۰
رقیق‌برشی	۰/۷	۷/۰۱×۱۰-۳	۷/۷۱×۱۰-۳
	۰/۸۵	۶/۸۳×۱۰-۳	۷/۵۹×۱۰-۳
نیوتنی	۱/۰	۶/۷۵×۱۰-۳	۷/۴۸×۱۰-۳
ضخیم‌برشی	۱/۱۵	۶/۶۶×۱۰-۳	۷/۳۳×۱۰-۳
	۱/۳۰	۶/۶۱×۱۰-۳	۷/۱۶×۱۰-۳

شکل (۶) تغییرات ضریب برآ را نسبت به گام زمانی حل در جریان سیال نامحدود از روی سیلندر مربعی نشان می‌دهد. این شکل برای سه نوع سیال رقیق‌برشی، نیوتنی و ضخیم‌برشی در Re=۸۰ رسم گردیده است. همان‌گونه که در این شکل مشخص است، در زمان‌های کم (تقریباً قبل ۱۵۰۰۰۰) ضریب برآ رفتاری غیر متناوب دارد درحالی‌که بعد از گذشت زمان‌های کافی (این زمان بستگی به نوع سیال دارد) به‌صورت متناوب می‌شود. با توجه به شکل (۶)، با افزایش شاخص رفتار غیرنیوتنی توانی و حرکت به‌سمت سیالات با خواص غیرنیوتنی ضخیم‌برشی بیشتر، زمان تناوب نیز افزایش می‌یابد.

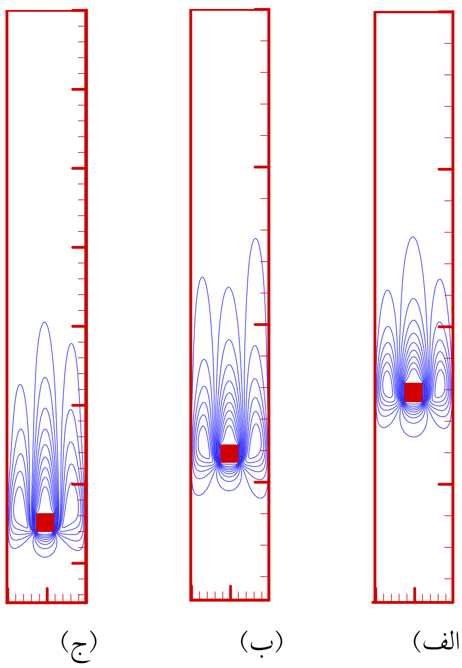


شکل ٦ مقادیر ضریب برآ برحسب گام زمانی حل برای سیالات رقیق‌برشی، نیوتنی و ضخیم‌برشی

سقوط ذره با سطح مقطع مربعی در سیالات غیرنیوتنی مختلف. هدف از این شبیه‌سازی بررسی اثرات خواص رقیق‌برشی و ضخیم‌برشی روی حرکت و سرعت حد یک ذره با سطح مقطع مربعی است. دامنهٔ محاسباتی شامل یک محفظه با طول بلند ۲cm ×۲۰cm (برای اطمینان از رسیدن به سرعت حد خصوصاً برای سیالات رقیق‌برشی) شامل ۲۰۰۰× ۲۰۰ گره محاسباتی است. خواص فیزیکی سیال و ذره همانند مساله سقوط ذرهٔ دایره‌ای در محفظهٔ حاوی سیال نیوتنی ارائه شده برای صحت‌سنجی می‌باشد. طول ضلع ذرهٔ مربعی برابر با ۰/۲۵ cmدرنظر گرفته شده است. در حالت اولیه، سیال و ذره هر دو در حالت سکون قرار دارند. مانند بسیاری از مطالعات پیشین انجام‌شده در زمینهٔ بررسی سقوط ذرات [34,35]، از عدد ارشمیدس برای مقایسه بین پارامترهای مختلف مربوط به سقوط ذرهٔ مربعی در سیالات ساکن با خواص مختلف نیوتنی، رقیق‌برشی و ضخیم‌برشی استفاده شده است. در کار حاضر از تعریف زیر برای محاسبهٔ عدد ارشمیدس تعمیم‌یافته (Ar_{pl}) استفاده شده است:

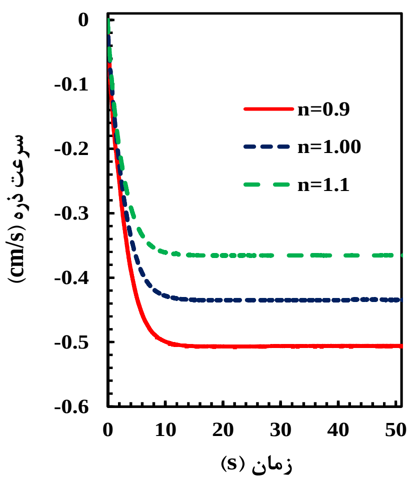
$$Ar_{pl}=\frac{gL^{\frac{2+n}{2-n}}}{m^{\frac{2}{2-n}}}(\rho_r-1) \qquad (۲۲)$$

که در آن ρ_r نسبت چگالی ذره به سیال است.



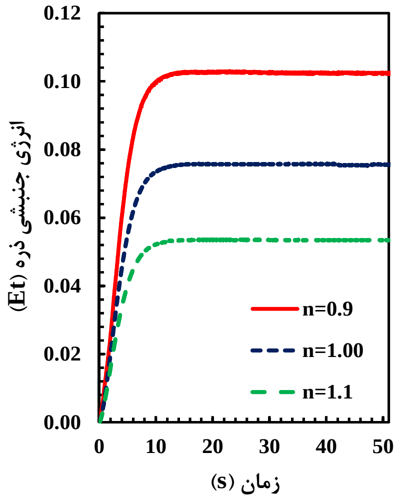
شکل ۷ خطوط جریان حول ذرهٔ مربعی در محفظهٔ حاوی سیال:
الف) ضخیم‌برشی (n=۱/۱)، ب) نیوتنی (n=۱/۰)،
ج) رقیق‌برشی (n=۰/۹) در زمان t=۵۰s

شکل (۷) خطوط جریان را حول ذره با سطح مقطع مربع در سیالات با خواص مختلف ضخیم‌برشی، نیوتنی و رقیق‌برشی در زمان ۵۰ ثانیه پس از شروع حرکت نشان می‌دهد. تمام ذرات تحت عدد ارشمیدس تعمیم‌یافته Ar_{pl}=۱۰^۳ رها شده‌اند. تفاوت بین ساختارهای جریان و سرعت برای شاخص‌های مختلف مدل توانی به‌خوبی در شکل (۷) مشهود است. با کاهش شاخص رفتار غیرنیوتنی توانی، و یا به بیانی دیگر با حرکت از سمت خواص ضخیم‌برشی به نیوتنی و سپس رقیق‌برشی، سرعت ذره افزایش می‌یابد (شکل ۸) و خطوط جریان کشیده‌تر می‌شوند. این تغییرات سرعت ذره به‌راحتی توسط تغییرات نرخ برش در مجاورت ذره قابل تفسیر می‌باشد. به‌عنوان مثال درخصوص سقوط ذره در سیالات ضخیم‌برشی، از آن‌جایی‌که بیشترین تغییر شکل سیال در نزدیکی مرز غوطه‌ور صورت می‌گیرد، بالاترین مقدار ویسکوزیتهٔ در اطراف ذره وجود دارد. بنابراین یک لایه از سیال با ویسکوزیته بالا اطراف ذره را احاطه خواهد کرد که این امر باعث کندتر شدن حرکت ذره در سیال ضخیم‌برشی (در مقایسه با حالت مشابه سیال نیوتنی) خواهد شد. برای سیالات غیرنیوتنی رقیق‌برشی روند پدیده‌ها کاملاً برعکس است.



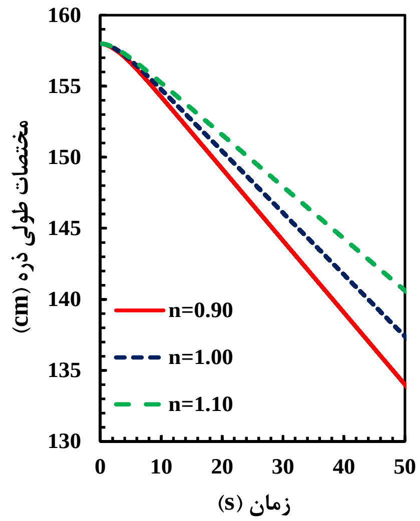
شکل ۸ سرعت طولی ذره برحسب زمان برای سیالات مختلف غیرنیوتنی و نیوتنی (Ar_{pl}=۱۰^۳)

هم‌چنین همان‌گونه که در شکل (۹) نشان داده شده است، با کاهش شاخص رفتار غیرنیوتنی توانی و درنتیجهٔ آن افزایش سرعت طولی متناظر (شکل ۸)، انرژی جنبشی ذره $E_t = 0.5M(u_p^2 + v_p^2)$ نیز افزایش خواهد یافت. که M جرم ذره است و u_p و v_p نمایانگر مؤلفه‌های سرعت ذره می‌باشند.



شکل ۹ انرژی جنبشی ذره برحسب زمان برای سیالات مختلف غیرنیوتنی و نیوتنی (Arpl=۱۰^۳)

شکل (۱۰) مختصات مکان مرکز ذره را برحسب زمان برای حرکت در سیالات توانی مختلف در ۵۰ ثانیهٔ نخست حرکت نشان می‌دهد. تمامی ذرات از ارتفاع ۱۸ cm بالای کف ظرف تحت نیروی گرانش رها می‌شوند و شتاب می‌گیرند تا این‌که پس از مدتی به سرعت حد خود می‌رسند. همان‌گونه که از شکل (۱۰) برمی‌آید، حتی با وجود اختلاف نسبتاً کم بین شاخص‌های رفتار غیرنیوتنی توانی، اختلاف ارتفاع قابل توجهی بین سیالات مختلف رقیق‌برشی و ضخیم‌برشی وجود دارد. همان‌طور که قبلاً نیز بحث شد، این اختلاف ارتفاع زیاد ناشی از تفاوت چشمگیر مقادیر سرعت سقوط ذره در سیالات غیرنیوتنی مختلف است.



شکل ۱۰ مختصات طولی ذره برحسب زمان برای سیالات مختلف غیرنیوتنی و نیوتنی (Arpl=۱۰۳).

جدول ۳ مقادیر سرعت حد ذرهٔ مربعی نسبت به شاخص رفتار غیرنیوتنی توانی در Ar_{pl}=۱۰^{۳}

نوع سیال	شاخص رفتار غیرنیوتنی توانی	سرعت ذره (cm/s)
رقیق‌برشی	۰/۷	۰/۵۸۹
	۰/۸	۰/۵٦۲
	۰/۹	۰/۵۰٦
نیوتنی	۱/۰	۰/٤۳٤
ضخیم‌برشی	۱/۱	۰/۳٦۵
	۱/۲	۰/۳۰۳
	۱/۳	۰/۲٤۸

جدول (۳) تغییرات سرعت حد ذره را برحسب شاخص رفتار غیرنیوتنی توانی نشان می‌دهد. چنان‌که بررسی‌های بالا نیز نشان داد سرعت حد ذره با کاهش شاخص رفتار غیرنیوتنی توانی افزایش می‌یابد.

نتیجه گیری

روش مرز غوطه‌ور – شبکهٔ بولتزمن غیرنیوتنی (IB-NLBM) برای شبیه‌سازی نیروهای بین سیال و جامد برای ذره ثابت و متحرک با سطح مقطع مربعی در مجاورت سیالات با خواص غیرنیوتنی رقیق‌برشی و ضخیم‌برشی توسعه داده شده است. روش ترکیبی حاضر تمامی خواص منحصربه‌فرد مربوط به روش‌های مرز غوطه‌ور (IB) و شبکهٔ بولتزمن (LBM) را دارا می‌باشد. دو ویژگی مهم روش IB-NLBM شامل شبیه‌سازی عددی مستقیم (DNS) و محاسبهٔ محلی ویسکوزیته، آن را به‌عنوان گزینه‌ای مناسب برای شبیه‌سازی حرکت اجسام در سیالات غیرنیوتنی مطرح می‌کند. برخلاف اکثر کارهای قبلی، اثرات نیرویی ناشی از جرم اضافه شده در حرکت شتابدار ذره (با چگالی متفاوت با سیال) نیز در معادلات حرکت در نظر گرفته شده است. ازطرفی نتایج نشان می‌دهند که روش پیشنهادی نتایج قابل قبولی برای جریان سیال در مجاورت شکل‌های غیردایروی مانند ذره مربعی ارائه می‌دهد. دقت روش IB-NLBM توسط یک فرآیند صحت‌سنجی گام‌به‌گام شامل جریان سیال غیرنیوتنی در کانال، جریان سیال نیوتنی از روی سیلندر مربعی ثابت و سقوط ذرهٔ مربعی در سیال نیوتنی بررسی شده است. دو مسئلهٔ کاربردی شامل جریان سیال غیرنیوتنی از روی سیلندر مربعی ثابت و حرکت ذرهٔ مربعی‌شکل داخل سیال غیرنیوتنی مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج نشان می‌دهند که با کاهش شاخص رفتار غیرنیوتنی دقت حل مسئلهٔ عددی کاهش می‌یابد. هم‌چنین نتایج تأثیر بسیار زیاد خواص غیرنیوتنی رقیق‌برشی و یا ضخیم‌برشی بر نیروهای وارد بر سیلندر ثابت و سرعت حرکت ذرهٔ متحرک را گزارش می‌دهد. در مورد جریان سیال غیرنیوتنی از روی سیلندر مربعی ثابت، ضریب پسا با افزایش شاخص رفتار غیرنیوتنی توانی هم برای جریان‌های پایا و هم ناپایا افزایش می‌یابد. هم‌چنین زمان تناوب ضریب برآ برای جریان‌های ناپایا از روی سیلندر ثابت، با افزایش شاخص رفتار غیرنیوتنی توانی افزایش خواهد یافت. در خصوص سقوط اجسام مربعی درون سیالات غیرنیوتنی ساکن، سرعت حد ذره با افزایش خواص

رقیق‌برشی سیال به‌شـدت افـزایش مـی‌یابـد. در پایـان خاطرنشان می‌شود که بررسـی و فهـم دقیـق مکانیـک سیالات مربوط به بسیاری از جریان‌های ذره‌ای موجود در کابردهای صـنعتی و بیولـوژیکی نیازمنـد اطلاعـات کـافی در خصـوص بـرهم‌کـنش بـین سـیال و جامـد غیردایـروی در جریـان‌هـای غیرنیـوتنی اسـت. روش IB-NLBM و نتایج حاصل از آن مـی‌توانـد بـه‌عنـوان ابزاری مناسب در این راستا مورد استفاده قرار گیرد.

مراجع

1. Feng, Z.G. and Michaelides, E.E., "The immersed boundary-lattice Boltzmann method for solving fluid–particles interaction problems", *Journal of Computational Physics*, Vol. 195, pp. 602–628, (2004).
2. Leal, L.G., “The Motion of Small Particles in Non-Newtonian Fluids”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 5, pp. 33-78, (1979).
3. Feng, Z.G. and Michaelides, E.E., "Proteus: a direct forcing method in the simulations of particulate flows", *Journal of Computational Physics*, Vol. 202, pp. 20–51, (2005).
4. Feng, J., Hu, H.H. and Joseph, D.D., "Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a Newtonian fluid. Part 1: sedimentation", *J. Fluid Mech.*, Vol. 261, pp. 95–134, (1994).
5. Yu, Z., Phan-Thien, N., Fan, Y. and Tanner, R.I., "Viscoelastic mobility problem of a system of particles", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 104, pp. 87–124, (2002).
6. Hu, H.H., Joseph, D.D. and Crochet, M.J., "Direct simulation of fluid particle motions", *Theor. Comp. Fluid Dyn.*, Vol. 3, pp. 285–306, (1992).
7. Wu, J. and Shu, C., "Particulate Flow Simulation via a Boundary Condition-Enforced Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Scheme", *Commun. Comput. Phys.*, Vol. 7, No. 4, pp. 793-812, (2010).
8. Hu, H.H., "Direct Simulation of Flows of Solid-Liquid Mixtures", *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 22, No. 2, pp. 335-352, (1996).
9. Patankar, N.A., Singh, P., Josepha, D.D., Glowinski, R. and Panc, T.-W., "A New Formulation of the Distributed Lagrange Multiplier/Fictitious Domain Method for Particulate Flows", *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 26, pp. 1509-1524, (2000).
10. Glowinski, R., Pan T.W., Hesla, T.I., Joseph, D.D. and Periaux, J., "A Fictitious Domain Approach to the Direct Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flow past Moving Rigid Bodies: Application to Particulate Flow", *Journal of Computational Physics*, Vol. 169, pp. 363–426, (2001).
11. Wan, D. and Turek, S., "Direct Numerical Simulation of Particulate Flow via Multigrid FEM Techniques and the Fictitious Boundary Method", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 51, pp. 531-566, (2006).
12. Peskin, C.S., "Flow patterns around heart valves: a digital computer method for solving the equations of motion", PhD thesis, Physiol, Albert Einstein Coll. Med., Univ. Mi- crofilms, (1972).
13. Succi, S., "*The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*", Oxford Univ.Press, New York, (2001).
14. Artoli, A.M. and Sequeira, A., "Mesoscopic simulations of unsteady shear-thinning flows", *in: Lecture Notes in Comput. Sci. Springer*, Berlin. Vol. 3992, pp. 78–85, (2006).
15. Gabbanelli, S., Drazer, G. and Koplik, J., "Lattice Boltzmann method for non-Newtonian (Power-Law) fluids", *Phys. Rev. E.*, Vol. 72, pp. 046312, (2005).
16. Aharonov, E. and Rothman, D.H., "Non-Newtonian flow (through porous-media): a lattice Boltzmann method", *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 20, pp. 679-682, (1993).

17. Ladd, A.J.C., "Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. I. Theoretical foundation", *J. Fluid Mech.*, Vol. 271, pp. 285-310, (1994).
18. Niu, X.D., Shu, C., Chew, Y.T. and Peng, Y., "A momentum exchange-based immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating incompressible viscous flows", *Physics Letters A*, Vol. 354, pp. 173–182, (2006).
19. Mohd-Yusof, J., "Combined immersed boundaries/B-splines methods for simulations of flows in complex geometries", Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, Stanford University, (1997).
20. Kang, S.K. and Hassan, Y.A., "A comparative study of direct-forcing immersed boundary-lattice Boltzmann methods for stationary complex boundaries", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 66, pp. 1132–1158, (2011).
21. Amiri Delouei, A., Nazari, M., Kayhani, M.H. and Succi, S., "Non-Newtonian unconfined flow and heat transfer over a heated cylinder using the direct-forcing immersed boundary–thermal lattice Boltzmann method", *Physical Review E*, Vol. 89, pp. 053312-1 - 053312-13, (2014).
22. Kang, S.K., "Immersed Boundary Methods in The Lattice Boltzmann Equation for Flow Simulation", Ph.D. thesis, Texas A&M University, (2010).
23. Leal, L.G., "The Motion of Small Particles in Non-Newtonian Fluids", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 5, pp. 33-78, (1979).
24. Huang, P.Y., Hu, H.H. and Joseph, D.D., "Direct simulation of the sedimentation of elliptic particles in Oldroyd-B fluids", *J. Fluid Mech.*, Vol. 362, pp. 297-325, (1998).
25. Guo, Z., Zheng, C. and Shi, B., "Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method", *Physical Review E*; Vol. 65, pp. 046308, (2002).
26. Qian, Y.H., d'Humieres, D. and Lallemand, P., "Lattice BGK model for Navier-Stokes equation", *Europhys. Lett.*, Vol. 17, pp. 479-484, (1992).
27. Scott Blair, G.W., Hening, J.C. and Wagstaff, A., "The flow of cream through narrow glass tubes", *Phys. Chem.*, Vol. 43, No. 7, pp. 853–864, (1939).
28. Chopard, B. and Droz, M., "*Cellular Automata Modeling of Physical Systems*", Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1998).
29. Peskin, C.S., "The immersed boundary method", *Acta Numerica*, pp. 479-517, (2002).
30. Wang, C-H. and Ho, J.R., "A lattice Boltzmann approach for the non-Newtonian effect in the blood flow", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 62, pp. 75–86, (2011).
31. Dhiman, A.K., Chhabra, R.P. and Eswaran V., "Steady Flow of Power-Law Fluids Across a Square Cylinder", *Chemical Engineering Research and Design*, Vol. 84, pp. 300–310, (2006).
32. Chatterjee, D. and Chatterjee, K., "Unconfined Flow and Heat Transfer around a Square Cylinder at Low Reynolds and Hartmann Numbers", *International Journal of Fluid Mechanics Research*, Vol. 40, pp. 71-90, (2013).
33. Wu, J., Shu, C. and Zhao, N., "Simulation of Thermal Flow Problems via a Hybrid Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method", *J. Appl. Math.*, Vol. 2012, pp. 161484-1 161484-11, (2012).
34. Best, A.C., "Empirical formulae for the terminal velocity of water drops falling through the atmosphere", *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, Vol. 76, pp. 302-311, (1950).
35. Chhabra, R.P., "*Bubbles, Drops and Particles in Non-Newtonian Fluids*", Second ed., FL: CRC Press, Boca Raton, (2006).